Construction des solutions de l'équation des ondes sphéroïdales hypergéométrique de Leitner/Meixner sur l'intervalle [-1,1] et sur [1,+∞]

Il s'agit ici de construire la solution de l'équation des ondes sphéroïdales hypergéométriques de Leitner/Meixner respectant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\Lambda+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$$

La construction des solutions est décrite dans deux articles successifs, d'abord en 1959 par A.Leitner.J.Meixner « Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen », puis en 1960 toujours par les mêmes auteurs A.Leitner.J.Meixner « Eine Verallgemeinerung der Sphäroidfunktionen ». Le premier article traite des solutions de l'équation $\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\nu(\nu+1)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$ *sous la forme de fonctions hypergéométriques et le second de l'extension proposée ci-dessus avec un paramètre γ de « sphéroïdicité ».*

Le premier article traite des solutions de l'équation : $\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\nu(\nu+1)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$.

Sous la forme de fonctions hypergéométriques dont voici les solutions indépendantes dans leurs domaines respectifs :

$$1\le x<\infty \quad \tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\sqrt{\pi}\,\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}}{2^{\nu+1}x^{\nu+\mu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2},\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{x^2}\right)$$

$$1\le x<\sqrt{2} \quad \tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\pi\,e^{-i\pi\mu}\left(x^2-1\right)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\lambda+1}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2},\frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2};1-\mu;1-x^2\right)$$

$$0\le x\le 1 \quad \tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\pi\,e^{i\pi\frac{(\nu-\mu-\lambda-1)}{2}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\lambda+1}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2},\frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2};\lambda+\frac{3}{2};x^2\right)$$

$$0\le x\le 1 \quad \tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\pi\,e^{-i\pi\mu}\left(1-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\lambda+1}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2},\frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2};1-\mu;1-x^2\right)$$

En plus de ces fonctions définies dans l'article original, je rajouterais la fonction suivante qui est également solution de l'équation différentielle de Leitner/Meixner :

$$0\le x\le 1\quad \widetilde{t}_\nu^{\,\mu,\lambda}(x)=\frac{\pi\, e^{i\pi\frac{(\nu-\mu+\lambda)}{2}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}x^{-\lambda}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+1-\lambda}{2},-\frac{\nu+\mu+\lambda}{2};\frac{1}{2}-\lambda\,;x^2\right)$$

Cette dernière fonction se trouve être en relation avec la fonction $\widetilde{r}_\nu^{\,\mu,\lambda}(x)$ *par la relation :*

$$\widetilde{t}_\nu^{\,\mu,\lambda}(x)=\widetilde{r}_\nu^{\,\mu,-1-\lambda}(x)$$

Lorsque le paramètre λ=-1 ou 0, l'équation différentielle est celle des fonctions de Legendre associées. Pour ce qui est de la première fonction $\widetilde{Q}$ *définie plus haut, il vient la même expression :*

$$1\le x<\infty\quad \widetilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\sqrt{\pi}\,\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}}{2^{\nu+1}x^{\nu+\mu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+2}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{x^2}\right)$$

Or cette expression est celle de la fonction de Legendre associées de deuxième espèce à une constante multiplicative près : $1\le x<\infty\quad \widetilde{Q}_\nu^{\mu,0}(x)=\widetilde{Q}_\nu^{\mu,-1}(x)=\frac{e^{-i\pi\mu}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_\nu^\mu(x)$. *Pour la deuxième fonction* $\widetilde{P}$ *l'expression s'écrit lorsque λ=-1 :*

$$\begin{cases}\widetilde{P}_\nu^{\mu,-1}(x)=\dfrac{\pi\, e^{-i\pi\mu}\left(x^2-1\right)^{-\frac{\mu}{2}}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}\times{}_2F_1\left(\dfrac{\nu-\mu+1}{2},\dfrac{-\nu-\mu}{2};1-\mu\,;1-x^2\right)\\[2ex] P_\nu^\mu(x)=\dfrac{2^\mu\left(x^2-1\right)^{-\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(1-\mu)}\quad {}_2F_1\left(\dfrac{\nu-\mu+1}{2},\dfrac{-\nu-\mu}{2};1-\mu\,;1-x^2\right)\end{cases}\Rightarrow \widetilde{P}_\nu^{\mu,-1}(x)=\frac{\pi\, e^{-i\pi\mu}}{2^{\nu+\mu+1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}P_\nu^\mu(x)$$

Pour la fonction de Ferrer on écrira de même : $\widetilde{p}_\nu^{\,\mu,-1}(x)=\dfrac{\pi\, e^{-i\pi\mu}}{2^{\nu+\mu+1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}\times\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$

Pour ce qui est de la fonction r, l'expression pour λ=-1 donne :

$$\widetilde{r}_\nu^{\,\mu,-1}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\; e^{i\pi\frac{\nu-\mu}{2}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}\quad {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+1}{2},\frac{-\nu-\mu}{2};\frac{1}{2};x^2\right)$$

$$\Rightarrow e^{-i\pi\frac{\nu+\mu}{2}}\,\frac{e^{i\pi\mu}2^{\nu+\mu}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)\widetilde{r}_\nu^{\,\mu,-1}(x)=2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\left(1-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)}\times{}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+1}{2},\frac{-\nu-\mu}{2};\frac{1}{2};x^2\right)$$

Pour ce qui est de la fonction t, l'expression pour λ=-1 donne :

$$\tilde{t}_{\nu}^{\mu,-1}(x)=\frac{2\sqrt{\pi}\;e^{i\pi\frac{(\nu-\mu-1)}{2}}\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}\quad x\;{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+2}{2},\frac{-\nu-\mu+1}{2};\frac{3}{2};x^{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\pi\frac{\nu+\mu}{2}}e^{i\pi\mu}2^{\nu+\mu}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)\tilde{t}_{\nu}^{\mu,-1}(x)=2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\times 2x\;{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+2}{2},\frac{-\nu-\mu+1}{2};\frac{3}{2};x^{2}\right)$$

Il se trouve que la fonction de Ferrer de deuxième espèce peut être définie comme suit :

$$\mathsf{Q}_{\nu}^{\mu}(x)=2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\times\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\times\left(\begin{array}{l}-Sin\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)}\quad{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+1}{2},\frac{-\nu-\mu}{2};\frac{1}{2};x^{2}\right)+\\+Cos\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\quad 2x\;{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+2}{2},\frac{-\nu-\mu+1}{2};\frac{3}{2};x^{2}\right)\end{array}\right)$$

D'où la relation en λ=-1 :

$$\mathsf{Q}_{\nu}^{\mu}(x)=e^{-i\pi\frac{\nu-\mu}{2}}2^{\nu+\mu}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)\times\left(-Sin\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\tilde{r}_{\nu}^{\mu,-1}(x)+e^{i\frac{\pi}{2}}Cos\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\tilde{t}_{\nu}^{\mu,-1}(x)\right)$$

Je me permet donc d'introduire les fonctions équivalentes à celles de Leitner/Meixner qui redonnent les définitions des fonctions associées de Legendre lorsque λ=-1 dans leurs domaines respectifs :

$$1\le x<\infty\quad \tilde{Q}_{(l),\nu}^{\mu,\lambda}(x)=\frac{e^{i\pi\mu}2^{\nu+\mu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\tilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=2^{\mu-1}e^{i\pi\mu}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\left(x^{2}-1\right)^{\frac{\mu}{2}}}{x^{\nu+\mu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\quad{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2},\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{x^{2}}\right)$$

$$1\le x<\infty\quad \tilde{P}_{(l),\nu}^{\mu,\lambda}(x)=\frac{e^{i\pi\mu}2^{\nu+\mu+1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\tilde{P}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=2^{\mu}\frac{\left(x^{2}-1\right)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\lambda+1}}{\Gamma(1-\mu)}\quad{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2},\frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2};1-\mu;1-x^{2}\right)$$

$$0\le x\le 1\quad \tilde{p}_{(l),\nu}^{\mu,\lambda}(x)=\frac{e^{i\pi\mu}2^{\nu+\mu+1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\tilde{p}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=2^{\mu}\frac{\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\lambda+1}}{\Gamma(1-\mu)}\quad{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2},\frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2};1-\mu;1-x^{2}\right)$$

$$0\le x\le 1\quad\left\{\begin{array}{l}\tilde{q}_{(l),\nu}^{\mu,\lambda}(x)=e^{-i\pi\frac{\nu-\mu}{2}}2^{\nu+\mu}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\times\left(-Sin\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\tilde{r}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)+i\,Cos\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\tilde{t}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)\right)=\\=2^{\mu-1}\pi\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\times\left(\begin{array}{l}-e^{-i\pi\frac{\lambda+1}{2}}Sin\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\quad x^{\lambda+1}{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2},\frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2};\lambda+\frac{3}{2};x^{2}\right)\\+e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}Cos\left(\pi\frac{(\nu+\mu)}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\quad x^{-\lambda}{}_{2}F_{1}\left(\frac{\nu-\mu+1-\lambda}{2},-\frac{\nu+\mu+\lambda}{2};\frac{1}{2}-\lambda;x^{2}\right)\end{array}\right)\end{array}\right.$$

<u>Relation de récurrence des fonctions hypergéométriques de Leitner/Meixner</u>

Ces fonctions suivent les relations de récurrence identiques suivantes entre plus proches « voisins » sur les paramètres ν,μ et/ou λ :

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\;\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\;\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu-1,\lambda}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu-1,\lambda}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{P}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{P}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{P}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{P}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{P}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{P}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\;\widetilde{P}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\widetilde{P}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\widetilde{P}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\;\widetilde{P}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{P}_{\nu+1}^{\mu-1,\lambda}(x)+\widetilde{P}_{\nu-1}^{\mu-1,\lambda}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{p}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{p}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{p}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{p}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{p}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{p}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\\-(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\;\widetilde{p}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\widetilde{p}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\widetilde{p}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\;\widetilde{p}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{p}_{\nu+1}^{\mu-1,\lambda}(x)+\widetilde{p}_{\nu-1}^{\mu-1,\lambda}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{r}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{r}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{r}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{r}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{r}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{r}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\\-(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\;\widetilde{r}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\widetilde{r}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\widetilde{r}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\;\widetilde{r}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{r}_{\nu+1}^{\mu-1,\lambda}(x)+\widetilde{r}_{\nu-1}^{\mu-1,\lambda}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{t}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{t}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{t}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{t}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{t}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{t}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\\-(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\;\widetilde{t}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\widetilde{t}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\widetilde{t}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\;\widetilde{t}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{t}_{\nu+1}^{\mu-1,\lambda}(x)+\widetilde{t}_{\nu-1}^{\mu-1,\lambda}(x)\end{cases}$$

A partir des deux expressions : $\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\end{cases}$*, on peut déduire l'expression de récurrence suivante :*

$$\widetilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda+1}(x)=\left(x\,(2\nu-1)-\frac{(\nu+\mu+1+\lambda)(\nu-\mu+1+\lambda)}{x\,(2\nu+1)}\right)\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda}(x)-\frac{(\nu+\mu+1+\lambda)(\nu-\mu+1+\lambda)(\nu+\mu-\lambda)(\nu-\mu-\lambda)}{x\,(2\nu+1)}\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda}(x)$$

Ainsi que l'expression de récurrence suivante :

$$\widetilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda-1}(x)=\left(x\,(2\nu-1)-\frac{(\nu+\mu-\lambda)(\nu-\mu-\lambda)}{x\,(2\nu+1)}\right)\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda}(x)-\frac{(\nu+\mu+1+\lambda)(\nu-\mu+1+\lambda)(\nu+\mu-\lambda)(\nu-\mu-\lambda)}{x\,(2\nu+1)}\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda}(x)$$

De même toujours à partir des deux récurrences :

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda-1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda-1}(x)\end{cases}$$

Nous avons trois expressions :

$$\begin{cases}(2\nu+1)\,x\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)=(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+2+\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)\\ \widetilde{Q}_{\nu+1}^{\mu,\lambda+1}(x)=\dfrac{(\nu+\mu+1-\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)+\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+3)\,x}\\ \widetilde{Q}_{\nu-1}^{\mu,\lambda+1}(x)=\dfrac{(\nu+\mu-1-\lambda)(\nu-\mu-1-\lambda)\,\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)+\widetilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu-1)\,x}\end{cases}$$

Qui nous permettent d'obtenir la relation de récurrence recherchée :

$$\frac{\widetilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{2\nu-1}+\left(\frac{(\nu+\mu-1-\lambda)(\nu-\mu-1-\lambda)}{2\nu-1}-(2\nu+1)x^2+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)}{2\nu+3}\right)\widetilde{Q}_{\nu}^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{2\nu+3}\widetilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)=0$$

A partir des deux autres récurrences :

$$\begin{cases}(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\,\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\tilde{Q}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\tilde{Q}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\,\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\tilde{Q}_{\nu+1}^{\mu-1,\lambda}(x)+\tilde{Q}_{\nu-1}^{\mu-1,\lambda}(x)\end{cases}$$

Nous avons trois expressions :

$$\begin{cases}(2\nu+1)\sqrt{x^2-1}\,\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=-(\nu+\mu+2+\lambda)(\nu+\mu+1-\lambda)\,\tilde{Q}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)+\tilde{Q}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)\\\tilde{Q}_{\nu+1}^{\mu+1,\lambda}(x)=\dfrac{-(\nu-\mu+2+\lambda)(\nu-\mu+1-\lambda)\,\tilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)+\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+3)\sqrt{x^2-1}}\\\tilde{Q}_{\nu-1}^{\mu+1,\lambda}(x)=\dfrac{-(\nu-\mu+\lambda)(\nu-\mu-1-\lambda)\,\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\tilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu-1)\sqrt{x^2-1}}\end{cases}$$

Et l'on parvient également à la même relation de récurrence :

$$\frac{\tilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{2\nu-1}+\left(\frac{(\nu+\mu-1-\lambda)(\nu-\mu-1-\lambda)}{2\nu-1}-(2\nu+1)x^2+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)}{2\nu+3}\right)\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{2\nu+3}\tilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)=0$$

Cette expression se simplifie légèrement comme suit :

$$\frac{\tilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{2\nu-1}+(2\nu+1)\left(\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}+\frac{1}{2}-x^2\right)\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{2\nu+3}\tilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)=0$$

On peut tirer partie de cette expression pour « linéariser » aux proches voisins l'expression $x^2\,\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)$

$$x^2\,\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\tilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

Cette relation est également valable pour toutes les autres fonctions $\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{t}_\nu^{\mu,\lambda}(x)$ *, soit*

$$x^2\,\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\tilde{P}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{P}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

$$x^2\,\tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\tilde{p}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{p}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

$$x^2\,\tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\tilde{r}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{r}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

$$x^2\,\tilde{t}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\frac{\tilde{t}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{t}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu+\mu+\lambda+2)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{t}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

Pour ce qui est des fonctions de Leitner/Meixner renormalisées, il vient une relation de récurrence identique entre la fonction de première et de deuxième espèce :

$$x^2\,\tilde{P}_{(l),\nu}^{\mu,\lambda}(x)=\frac{(\nu+\mu+\lambda)(\nu+\mu-\lambda-1)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}\tilde{P}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{P}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

$$x^2\,\tilde{Q}_{(l),\nu}^{\mu,\lambda}(x)=\frac{(\nu+\mu+\lambda)(\nu+\mu-\lambda-1)}{(2\nu+1)(2\nu-1)}\tilde{Q}_{\nu-2}^{\mu,\lambda}(x)+\left(\frac{1}{2}+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu-1)(2\nu+3)}\right)\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)+\frac{(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\tilde{Q}_{\nu+2}^{\mu,\lambda}(x)$$

Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques de Leitner/Meixner suivant la transformation des paramètres

L'équation différentielle $\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\nu(\nu+1)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$ *étant invariante par les changements de paramètres :*

$$\begin{aligned}&\mu \to -\mu\\&\lambda \to -\lambda-1\\&\nu \to -\nu-1\end{aligned}$$

Ces changements opérés sur les solutions $\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(x),\tilde{t}_\nu^{\mu,\lambda}(x)$ *donnent également des solutions de l'équation différentielle.*

Il se trouve que :

$$\begin{aligned}&\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\tilde{Q}_\nu^{-\mu,\lambda}(x)=\tilde{Q}_\nu^{\mu,-\lambda-1}(x)\\&\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\tilde{P}_\nu^{\mu,-\lambda-1}(x)\\&\tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\tilde{p}_\nu^{\mu,-\lambda-1}(x)\\&\tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\tilde{t}_\nu^{\mu,-\lambda-1}(x)\\&\tilde{t}_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\tilde{r}_\nu^{\mu,-\lambda-1}(x)\end{aligned}$$

__Construction des solutions angulaires de l'équation des ondes sphéroïdales hypergéométriques de Leitner/Meixner__

Venons-en à la construction des solutions de l'équation des ondes sphéroïdales hypergéométriques de Leitner/Meixner respectant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\Lambda+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0$$

Et prenons une solution sous la forme d'un développement par les fonctions hypergéométriques de Leitner/Meixner introduites auparavant, par exemple les fonctions Q :

$$y_\nu^{\mu,\lambda}(x)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_{2l}\,\widetilde{Q}_{\nu+2l}^{\mu,\lambda}(x)$$

En injectant ce développement dans l'équation différentielle ci-dessus et tirant partie du respect de l'équation différentielle hypergéométrique de Leitner/Meixner et du terme x^2 linéarisé aux plus proches voisins :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}\widetilde{Q}_{\nu+2l}^{\mu,\lambda}(x)\right)+\left((\nu+2l)(\nu+2l+2)-\dfrac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\dfrac{\mu^2}{1-x^2}\right)\widetilde{Q}_{\nu+2l}^{\mu,\lambda}(x)=0\\ x^2\,\widetilde{Q}_{\nu+2l}^{\mu,\lambda}(x)=\dfrac{\widetilde{Q}_{\nu+2l-2}^{\mu,\lambda}(x)}{(2\nu+4l+1)(2\nu+4l-1)}+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{2(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)}\right)\widetilde{Q}_{\nu+2l}^{\mu,\lambda}(x)+\dfrac{(\nu+2l+\mu+\lambda+2)(\nu+2l-\mu+\lambda+2)(\nu+2l+\mu-\lambda+1)(\nu+2l-\mu-\lambda+1)}{(2\nu+4l+1)(2+4l\nu+3)}\widetilde{Q}_{\nu+2l+2}^{\mu,\lambda}(x)\end{cases}$$

Alors les coefficients du développement suivent une relation de récurrence à trois termes :

$$\begin{aligned}&\gamma^2\frac{(\nu+2l+\mu+\lambda)(\nu+2l-\mu+\lambda)(\nu+2l+\mu-\lambda-1)(\nu+2l-\mu-\lambda-1)}{(2\nu+4l-1)(2+4l\nu-3)}\times c_{2l-2}+\\&+\left(\Lambda-(\nu+2l)(\nu+2l+1)+\frac{\gamma^2}{2}\left(1+\frac{(2\lambda+1+2\mu)(2\lambda+1-2\mu)}{(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)}\right)\right)\times c_{2l}+\frac{\gamma^2}{(2\nu+4l+4)(2\nu+4l+5)}\times c_{2l+2}=0\\&\Leftrightarrow\\&\gamma^2\frac{(\nu+2l+\mu+\lambda)(\nu+2l-\mu+\lambda)(\nu+2l+\mu-\lambda-1)(\nu+2l-\mu-\lambda-1)}{(2\nu+4l-1)(2+4l\nu-3)}\times c_{2l-2}+\\&+\left(\Lambda-(\nu+2l)(\nu+2l+1)+2\gamma^2\frac{(\nu+2l)(\nu+2l+1)+\mu^2-1-\lambda(\lambda+1)}{(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)}\right)\times c_{2l}+\frac{\gamma^2}{(2\nu+4l+4)(2\nu+4l+5)}\times c_{2l+2}=0\end{aligned}$$

Cette récurrence manque de symétrie, et pour cela Leitner et Meixner introduises les coefficients suivants : $c_{2l}=2^{2l}\times\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+2l+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2l+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}\times a_{2l}$*. Avec de tels coefficients la récurrence prend alors la forme :*

$$\begin{aligned}&-\gamma^2\frac{(\nu+2l-\mu-\lambda-1)(\nu+2l-\mu+\lambda)}{(2\nu+4l-1)(2+4l\nu-3)}\times c_{2l-2}+\\&+\left((\nu+2l)(\nu+2l+1)-2\gamma^2\frac{(\nu+2l)(\nu+2l+1)+\mu^2-1-\lambda(\lambda+1)}{(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)}-\Lambda\right)\times c_{2l}+\\&-\gamma^2\frac{(\nu+2l+\mu-\lambda+1)(\nu+2l+\mu+\lambda+2)}{(2\nu+4l+4)(2\nu+4l+5)}\times c_{2l+2}=0\end{aligned}$$

Construction des solutions radiales de l'équation des ondes sphéroïdales hypergéométriques de Leitner/Meixner

Il se trouve que tout comme pour l'équation des ondes sphéroïdales, les solutions radiales (x>1) de celle des ondes de Leitner/Meixner peuvent se construire à l'aide des fonctions de Bessel sphériques. En écrivant sous une forme plus commode cette équation :

$$\left(x^2-1\right)y''(x)+2x\,y'(x)+\left(-\Lambda+\gamma^2\left(x^2-1\right)+\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}-\frac{\mu^2}{x^2-1}\right)y(x)=0$$

Ensuite transformons cette équation différentielle par le changement de variable suivant : ζ=γx, puis le passage à la limite γ->0 :

$$y(x)=y\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)=u(\zeta)\rightarrow\gamma^2\left(\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-1\right)u''(\zeta)+2\frac{\zeta}{\gamma}\gamma\,u'(\zeta)+\left(-\Lambda+\gamma^2\left(\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-1\right)+\gamma^2\frac{\lambda(\lambda+1)}{\zeta^2}-\frac{\mu^2}{\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-1}\right)u(\zeta)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\zeta^2-\gamma^2\right)u''(\zeta)+2\zeta\,u'(\zeta)+\left(-\Lambda+\left(\zeta^2-\gamma^2\right)+\gamma^2\frac{\lambda(\lambda+1)}{\zeta^2}-\frac{\mu^2\gamma^2}{\zeta^2-\gamma^2}\right)u(\zeta)=0$$

$$\gamma\rightarrow 0\Rightarrow\zeta^2u''(\zeta)+2\zeta\,u'(\zeta)+\left(\zeta^2-\Lambda\right)u(\zeta)=0$$

Or la dernière équation est exactement l'équation des fonctions de Bessel sphériques définie à partir des fonctions de Bessel sous la forme :

$$\Lambda=\nu(\nu+1)\quad j_\nu(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\qquad y_\nu(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Y_{\nu+\frac{1}{2}}(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}$$

On peut de manière tout aussi équivalente transformer l'équation différentielle par le changement suivant de fonction :

$$y(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}u(\gamma\,x)=\left(1-\frac{\gamma^2}{\zeta^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}u(t)=\zeta^{\mu}\left(\zeta^2-\gamma^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}u(\zeta)\qquad\zeta=\gamma\,x$$

$$\Leftrightarrow\zeta^2u''(\zeta)+2\zeta\,\frac{\zeta^2-\mu\,\gamma^2}{\zeta^2-\gamma^2}u'(\zeta)+\left(\frac{\zeta^4-\zeta^2\left(\Lambda+\gamma^2\right)+\gamma^2\left(\lambda(\lambda+1)+\mu(1-\mu)\right)}{\zeta^2-\gamma^2}\right)u(\zeta)=0$$

$$\Leftrightarrow\zeta^2u''(\zeta)+2\zeta\left(1+\gamma^2\frac{1-\mu}{t^2-\gamma^2}\right)u'(\zeta)+\left(\zeta^2-\Lambda+\gamma^2\frac{\left(\lambda(\lambda+1)+\mu(1-\mu)\right)-\Lambda}{\zeta^2-\gamma^2}\right)u(\zeta)=0$$

Et obtenir par le même passage à la limite, l'équation de Bessel sphérique. Ce passage à la limite des solutions radiales de l'équation est donc plus subtil à savoir : $\underset{\gamma\rightarrow 0}{Lim}\quad y\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)=a\;j_\nu(\zeta)+b\;y_\nu(\zeta)$.

Ce comportement limite en γ->0 nous suggère d'utiliser les fonctions de Bessel sphériques j,y et Hankel comme une base de développement en série, soit formellement pour quatre types de fonction radiales :

$$\begin{cases} x \in [1,+\infty] \qquad S_\nu^{(i)\mu,\lambda}(x,\gamma^2) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2l}\; f_{\nu+2k}^{(i)}(\gamma\, x) \quad i = 1,2,3,4 \\ \textit{Fonctions de Bessel Sphériques } f_{\nu+2k}^{(i)}(x) \quad f^{(i)} = j, y, h^{(1)}, h^{(2)} \end{cases}$$

En tirant partie des diverses propriétés de linéarisation aux proches voisins des fonctions de Bessel sphériques :

$$\begin{cases} \zeta = \gamma\, x \\ \zeta^2 f_{\nu+2k}''(\zeta) = -2 f_{\nu+2k}'(\zeta) + \left((\nu+2k)(\nu+2k+1) - \zeta^2\right) f_{\nu+2k}(\zeta) \\ \frac{f_{\nu+2k-1}(\zeta)}{\zeta} = \frac{f_{\nu+2k-2}(\zeta)}{2(\nu+2k-1)+1} + \frac{f_{\nu+2k}(\zeta)}{2(\nu+2k-1)+1} \qquad \frac{f_{\nu+2k+1}(\zeta)}{\zeta} = \frac{f_{\nu+2k}(\zeta)}{2(\nu+2k+1)+1} + \frac{f_{\nu+2k+2}(\zeta)}{2(\nu+2k+1)+1} \\ \frac{f_{\nu+2k}(\zeta)}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta} \times \frac{f_{\nu+2k-1}(\zeta)}{2(\nu+2k)+1} + \frac{1}{\zeta} \times \frac{f_{\nu+2k+1}(\zeta)}{2(\nu+2k)+1} \qquad f_{\nu+2k}'(\zeta) = \frac{(\nu+2k) f_{\nu+2k-1}(\zeta) - (\nu+2k+1) f_{\nu+2k+1}(\zeta)}{2(\nu+2k)+1} \\ f_{\nu+2k-1}'(\zeta) = \frac{(\nu+2k-1) f_{\nu+2k-2}(\zeta) - (\nu+2k) f_{\nu+2k}(\zeta)}{2(\nu+2k-1)+1} \qquad f_{\nu+2k+1}'(\zeta) = \frac{(\nu+2k+1) f_{\nu+2k}(\zeta) - (\nu+2k+2) f_{\nu+2k+2}(\zeta)}{2(\nu+2k+1)+1} \\ f_{\nu+2k}''(\zeta) = \frac{(\nu+2k) f_{\nu+2k-1}'(\zeta) - (\nu+2k+1) f_{\nu+2k+1}'(\zeta)}{2(\nu+2k)+1} \end{cases}$$

On obtient la récurrence suivante sur les coefficients du développement :

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \frac{(\nu+2l-\mu-\lambda-1)(\nu+2l-\mu+\lambda)}{(2\nu+4l-1)(2+4l\nu-3)} \times c_{2l-2} + \\ &+\left(\Lambda - (\nu+2l)(\nu+2l+1) + 2\gamma^2 \frac{(\nu+2l)(\nu+2l+1) + \mu^2 - 1 - \lambda(\lambda+1)}{(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)}\right) \times c_{2l} + \\ &+\gamma^2 \frac{(\nu+2l+\mu-\lambda+1)(\nu+2l+\mu+\lambda+2)}{(2\nu+4l+4)(2\nu+4l+5)} \times c_{2l+2} = 0 \end{aligned}$$

On constate donc que c'est une récurrence identique à la récurrence « symétrisée » obtenue pour les fonctions angulaires. Avec le développement de la forme : $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2l}\; f_{\nu+2k}^{(i)}(\gamma\, x)$*, on obtient la même récurrence en changeant μ en -μ :*

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \frac{(\nu+2l+\mu-\lambda-1)(\nu+2l+\mu+\lambda)}{(2\nu+4l-1)(2+4l\nu-3)} \times c_{2l-2} + \\ &+\left(\Lambda - (\nu+2l)(\nu+2l+1) + 2\gamma^2 \frac{(\nu+2l)(\nu+2l+1) + \mu^2 - 1 - \lambda(\lambda+1)}{(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)} - \right) \times c_{2l} + \\ &+\gamma^2 \frac{(\nu+2l-\mu-\lambda+1)(\nu+2l-\mu+\lambda+2)}{(2\nu+4l+4)(2\nu+4l+5)} \times c_{2l+2} = 0 \end{aligned}$$

à finir